1.1 Příklad z ekonomického prostředí [1]

Smysl solidního zvládnutí matematiky v bakalářských oborech na Fakultě podnikatelské VUT v Brně je především v aplikační síle matematiky v odborných předmětech a v praxi rovněž pro dobré porozumění a korektní využití matematických metod a praktik, správné interpretaci výpočetních a grafických výstupů pro ekonomické či podnikatelské prostředí, možné simulace apod. Stejně tak matematika podporuje logické myšlení, kombinační schopnosti, paměť, odhad apod., čehož je třeba při rozhodování či řízení každé organizace.

V tomto odstavci je uveden praktický příklad vyšetření průběhu jednofaktorového modelu produkční funkce s využitím systému Maple. Pro ukázku byla vybrána krátkodobá *produkční funkce* rodinného kovářství. Byla identifikována následujícím předpisem: $Q = Q(L) = -L^3 + 10L^2$, kde Q je množství vyrobených kovaných dveří a L počet zaměstnanců kovářství ve výrobě.

(Předpis byl zjištěn ručním výpočtem metodou nejmenších čtverců v rámci zpracování semestrální práce v předmětu Matematika 2. Z důvodu rozsahu práce a neúčelnosti na tomto místě, postup výpočtu neuvádím).

Definujeme funkci v systému Maple:

> $Q := L \rightarrow -L^3 + 10\,L^2;$

$$Q := L \rightarrow -L^3 + 10\,L^2$$

A, Vyšetřujeme průběh funkce (dodržíme postup dle studijního textu - odst. 1.12)

1 Určíme definiční obor

Zadaná funkce je polynomem třetího stupně, který má obecně definiční obor rovný celému oboru reálných čísel $\boldsymbol{R}$. Na celém definičním oboru je funkce *spojitá*. V případě produkční funkce je ovšem definiční obor omezen zleva nezápornými hodnotami (počet zaměstnanců nemůže být záporný, výrobky musí někdo vyrábět) a hodnota produkční funkce nemůže být záporná (nelze vyrábět záporné množství výrobků). Teoreticky je definiční obor omezen i zprava (z praktického hlediska - výrobní faktory, v tomto případě lidská síla, nejsou nevyčerpatelné).

---

[1] Při zpracování bylo využito získaných znalostí z předmětu Mikroekonomie (MIK_1) a inspirováno vybranou pasáží publikace profesora Mezníka: Úvod do matematické ekonomie pro ekonomy (ISBN: 978-80-214-4239-9).

Důležitá poznámka: pro detailnější pochopení vyšetřování průběhu funkce obecně, budeme nadále postupovat tak, jako by definiční obor omezen nebyl. Budeme pracovat s polynomem třetího stupně (definován na celém oboru reálných čísel $\boldsymbol{R}$). Ekonomickou interpretaci zadané produkční funkce provedeme až v samém závěru matematického vyšetřování průběhu funkce (příslušným omezením definičního oboru).

2 Určíme průsečíky s osami, nulové body, vlastnosti a chování funkce v krajních bodech nespojitosti

Průsečík s osou y získáme jako funkční hodnotu v bodě 0:

> $Q(0);$

$$0$$

Průsečíky s osou x získáme řešením rovnice $-L^3+10L^2 = 0$:

> $\{solve(Q(L) = 0)\};$

$$\{0, 10\}$$

Zjistili jsme, že funkce prochází počátkem souřadnicové soustavy a osu x protíná i v bodě $[10; 0]$.

Zjistíme intervaly, kde je funkce kladná a záporná:

> $solve(Q(L) > 0);$

$$RealRange(-\infty, Open(0)), RealRange(Open(0), Open(10))$$

> $\mathrm{solve}(\mathrm{Q}(\mathrm{L}) < 0);$

$$RealRange(Open(10), \infty)$$

Funkce nabývá kladných hodnot (graf je nad osou x) na intervalu $(-\infty; 0)$ a $(0; 10)$. Na intervalu $(10; \infty)$ funkce nabývá záporných hodnot (graf je pod osou x).

Zjistíme případnou sudost a lichost funkce (i když v případě produkční funkce nás zajímá chování této funkce pouze v prvním kvadrantu)**:**

> $Q(-L)$

$$L^3 + 10\,L^2$$

> $-Q(L)$

$$L^3 - 10\,L^2$$

Protože $Q(L) \neq Q(-L)$, tak funkce není sudá a není ani lichá, protože $Q(-L) \neq -Q(L)$.

Chování funkce v krajních bodech definičního oboru:

> $limit(\mathrm{Q}(\mathrm{L}), L = infinity);$

$$-\infty$$

> $limit(\mathrm{Q}(\mathrm{L}), L = -infinity);$

$$\infty$$

3 Vyšetříme monotónnost funkce a určíme její (lokální) extrémy

Zjistíme intervaly, kde je funkce rostoucí / klesající a určíme stacionární body podezřelé z extrému (z první derivace funkce):

> $solve(diff(Q(L), L) > 0);$

$$RealRange\left(Open(0), Open\left(\frac{20}{3}\right)\right)$$

> $solve(diff(Q(L), L) < 0);$

$$RealRange(-\infty, Open(0)), RealRange\left(Open\left(\frac{20}{3}\right), \infty\right)$$

> $solve(diff(Q(L), L) = 0);$

$$0, \frac{20}{3}$$

Funkce je na intervalu $(0; \frac{20}{3})$ rostoucí, na intervalech $(-\infty; 0)$ a $(\frac{20}{3}; \infty)$ klesající. Body 0 a $\frac{20}{3}$ jsou body stacionárními (podezřelými z extrému).

Ověříme, jestli se ve stacionárních bodech nachází (lokální) extrémy funkce (pomocí tzv. postačující podmínky pro extrém):

> $\mathrm{D}(\mathrm{D}(Q))(0);$

$$20$$

> $\mathrm{D}(\mathrm{D}(Q))\left(\frac{20}{3}\right);$

$$-20$$

Protože $Q''(0) > 0$, funkce má v bodě 0 minimum. Protože $Q''\left(\frac{20}{3}\right) < 0$, funkce má v bodě $\frac{20}{3}$ maximum.

Zjistíme hodnoty extrémů funkce v daných bodech:

> $Q\left(\frac{20}{3}\right);$

$$\frac{4000}{27}$$

> $Q(0);$

$$0$$

Ve výsledném grafu: bod $[0; 0]$ - (lokální) minimum, bod $[\frac{20}{3}; \frac{4000}{27}]$ - (lokální) maximum.

$Q_{min} = Q(0) = 0$

$Q_{max} = Q\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{4000}{27} \cong 148{,}15$

4 Vyšetříme konvexnost, konkávnost funkce a určíme inflexní body

Zjistíme intervaly, kde je funkce konkávní / konvexní a určíme inflexní body (pomocí druhé derivace):

> $solve(diff(Q(L), L, L) > 0);$

$$RealRange\left(-\infty, Open\left(\frac{10}{3}\right)\right)$$

> $solve(diff(Q(L), L, L) < 0);$

$$RealRange\left(Open\left(\frac{10}{3}\right), \infty\right)$$

> $solve(diff(Q(L), L, L) = 0);$

$$\frac{10}{3}$$

Funkce je na intervalu $\left(-\infty; \frac{10}{3}\right)$ konvexní (graf je stále nad tečnou) a na intervalu $(0; \infty)$ konkávní (graf je stále pod tečnou). Protože v bodě $\left(\frac{10}{3}\right)$ dochází ke změně znaménka druhé derivace, nachází se v tomto bodě inflexní bod.

Ověříme inflexní bod (pomocí třetí derivace):

> $\mathrm{D}(\mathrm{D}(\mathrm{D}(Q)))\left(\frac{10}{3}\right);$

$$-6$$

Protože $Q'''\left(\frac{10}{3}\right) \neq 0$, bod $\frac{10}{3}$ je inflexní.

$Q_{infl} = Q\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{2000}{27} \cong 74{,}07$

5 Určíme asymptoty grafu

U polynomů neexistují asymptoty grafu.

6 Vytvoříme tabulku význačných hodnot

Tab.: Tabulka hodnot funkce (Zdroj: vlastní zpracování)

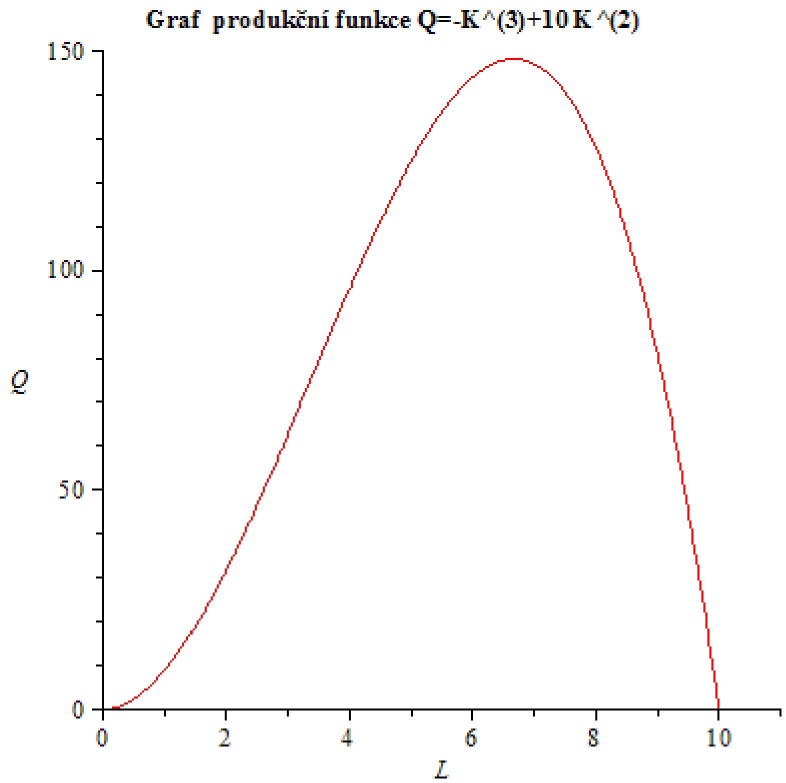
x	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{20}{3}$	10
y	0	$\frac{2000}{27}$	$\frac{4000}{27}$	0

7 Graf funkce

Jak bylo na začátku úlohy deklarováno, ekonomická interpretace je provedena až nakonec. Jde o to, abychom zjištěné skutečnosti ekonomicky interpretovali. Při kreslení grafu vyšetřované *produkční funkce* se proto zaměříme již pouze na I. kvadrant kartézské soustavy souřadnic (z definičního oboru vyloučíme záporné hodnoty a body, kde funkce nabývá záporných hodnot) - důvod již byl zmíněn u určování definičního oboru. Definičním oborem produkční funkce kovářství je interval $(0; 10)$.

Vykreslení grafu funkce produkce:

> $plot\left([\mathrm{Q(L)}], L = 0..11, Q = 0..150,\ \mathrm{title} = \text{"Graf produkční funkce Q} = -\mathrm{K}^3 + 10K^2\text{"}\right)$



Graf 1: Graf produkční funkce (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

Jak jsme pomocí vyšetřování průběhu funkce již zjistili, funkce má (lokální) maximum v bodě $\frac{20}{3}(\cong 6{,}67)$, kde nabývá hodnoty $\frac{4000}{27}(\cong 148)$. Protože nemůžeme člověka, jako představitele osoby, která vykonává práci, rozčtvrtit, porovnáme hodnotu produkce pro šest a sedm zaměstnanců.

Výpočet produkce pro stanovené $L = 6$ a $L = 7$:

> $Q(6);$

$$144$$

> $Q(7);$

$$147$$

Protože $Q(7) > Q(6)$, maximální produkce je dosaženo při sedmi zaměstnancích, kteří vyrobí 147 kovaných dveří.

B, Mezní a průměrný produkt práce

Vypočteme mezní produkt práce a určíme jeho hodnoty pro jednotlivé počty zaměstnanců dle vzorce $MP_L = \frac{dQ}{dL} = Q'(L)$:

> **for** i **from** 0 **by** 1 **to** 9 **do** $print(\ MP[L](i) = \mathrm{D}(Q)(i))$ **end do**

$$MP_L(0) = 0$$
$$MP_L(1) = 17$$
$$MP_L(2) = 28$$
$$MP_L(3) = 33$$
$$MP_L(4) = 32$$
$$MP_L(5) = 25$$
$$MP_L(6) = 12$$
$$MP_L(7) = -7$$
$$MP_L(8) = -32$$
$$MP_L(9) = -63$$

Získané výsledky interpretujeme např. u $MP_L(5) = 25$. Číslo 25 udává rychlost změny produkce vzhledem k práci při pěti zaměstnancích (přijetím šestého zaměstnance vzroste hodnota produkce **přibližně** o 25 vyrobených kovaných dveří). Analogicky lze interpretovat pro ostatní počty zaměstnanců.

Největší nárůst produkce je pro $L = 3$ a činí 33, poté růst produkce začíná postupně klesat. Při $L = 7$ již nedochází k růstu, pokles produkce pokračuje. Je to evidentní důsledek zákona klesajících výnosů [roste-li postupně vstup (ceteris paribus), budou přírůstky výstupu od jistého bodu klesat].

Přibližný výpočet změny produkce ΔQ jako odezvy na změnu práce o dL se provádí užitím diferenciálu.

Při výpočtu užijeme vzorce $\Delta Q \approx dQ = Q'(L)dL = MP_L dL$:

> $\mathrm{D}(Q)(2) \cdot 3;$

$$84$$

Pokud kovářství zaměstnává dva zaměstnance a rozhodne se přijmout ještě tři, produkce se zvýší **přibližně** o osmdesát čtyři kovaných dveří.

Změna produkce dle vzorce $\Delta Q = Q(L + dL) - Q(L)$:

> $Q(5) - Q(2)$

$$93$$

Použitý vzorec vyjadřuje, na rozdíl od výpočtu pomocí diferenciálu, **přesnou** změnu produkce pro použitý příklad, kdy se firma rozhodne zvýšit počet zaměstnanců ze dvou na pět. Produkce se zvýší o devadesát tři kovaných dveří.

Vypočteme průměrný produkt práce dle vzorce $AP_L = \frac{Q}{P}$ a určíme jednotlivé hodnoty pro jednotlivý počet zaměstnanců:

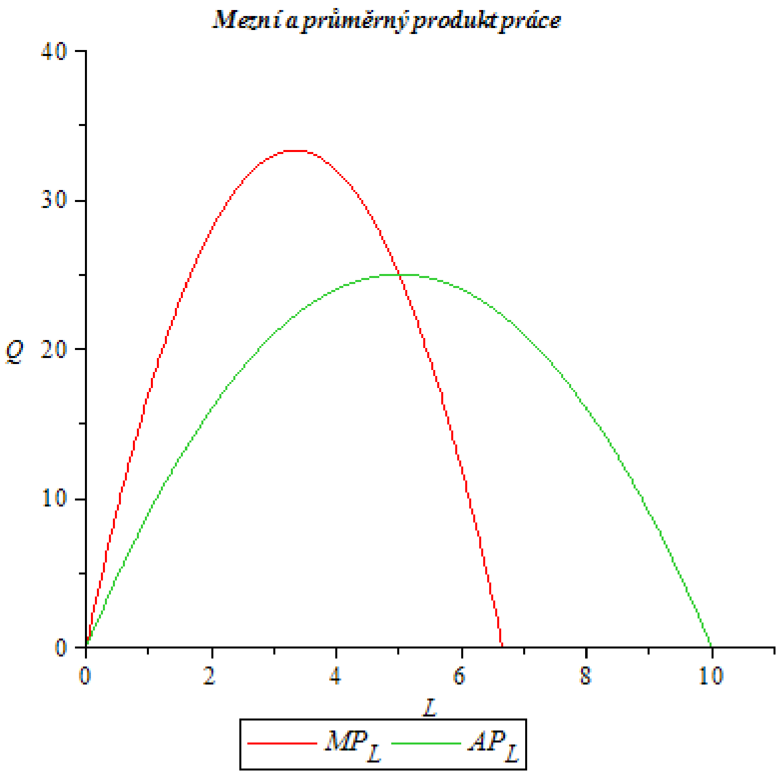
> $print(AP[L](0) = 0);$
> **for** i **from** 1 **by** 1 **to** 10 **do** $print\left(AP[L](i) = \frac{Q(i)}{i} \right)$ **end do**

$$AP_L(0) = 0$$
$$AP_L(1) = 9$$
$$AP_L(2) = 16$$
$$AP_L(3) = 21$$
$$AP_L(4) = 24$$
$$AP_L(5) = 25$$
$$AP_L(6) = 24$$
$$AP_L(7) = 21$$
$$AP_L(8) = 16$$
$$AP_L(9) = 9$$
$$AP_L(10) = 0$$

Průměrný produkt práce je ukazatelem produktivity práce. Je dán poměrem mezi celkovým množstvím vyrobených kovaných vrat (Q) a množstvím vynaložené práce (počtem zaměstnanců - L). Cílem by tedy měla být maximalizace průměrného produktu práce. U příkladu kovářství je maximalizace dosaženo při pěti zaměstnancích, kdy $AP_L(5) = 25$ (na každého zaměstnance připadá dvacet pět vyrobených kovaných vrat).

Vykreslíme křivky AP_L a MP_L:

$plot\left(\left[\mathrm{D(Q)}(L), \frac{\mathrm{Q(L)}}{L} \right], L = 0..11, Q = 0..40, legend = [MP[L],$
$AP[L]], title = \text{"Mezní a průměrný produkt práce"} \right);$



Graf 2: Mezní a průměrný produkt práce (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)