1 Funkce [1]

V životě se běžně setkáváme se vztahem závislosti mezi různými proměnnými. Takovým vztahem závislosti může být například cena akciového titulu v závislosti na čase nebo teplota v místnosti v závislosti na množství dodaného tepla. Funkční závislost je nejvýznamnějším typem závislostí. Matematickým modelem funkční závislosti je pojem **funkce** (10).

Funkce f je předpis, který každému číslu $x \in D$ přiřazuje právě jedno reálné číslo $y \in H$. Poté píšeme: $y = f(x)$, kde x nazýváme **nezávisle** proměnnou (argumentem funkce) a y **závisle** proměnnou (funkční hodnotou). Množina D se nazývá definiční obor funkce a značí se $D(f)$. Množina H se nazývá obor hodnot funkce a značí se $H(f)$ (11).

Definiční obor funkce $y = f(x)$ představuje množinu všech reálných čísel, pro kterou má daná funkce smysl (pokud při zadávání funkce není uvedeno jinak). V tabulce číslo 1 jsou uvedeny omezující podmínky nejčastěji frekventovaných funkcí. Obor hodnot funkce $y = f(x)$ představuje množinu čísel, ke kterým existuje $x \in D(f)$ (12).

Tab. 1: Omezující funkce definičního oboru (Vlastní zpracování dle: (9))

Funkce	Podmínka
$\frac{čitatel}{jmenovatel}$	$jmenovatel \neq 0$
$\sqrt[n]{x}, kde\ (n \,\%\, 2) = 0$	$x \geq 0$
$log_a(x)$	$x > 0$
$arcsin(x)$	$-1 \leq x \leq 1$
$arccos(x)$	$-1 \leq x \leq 1$
$tg(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$
$cotg(x)$	$x \neq k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$

[1] V celé bakalářské práci se pojmem funkce uvažuje funkce jedné proměnné.

Funkce může být zadána několika způsoby, obvykle:

- **Rovnicí** - nejčastější způsob zápisu.
- **Slovním předpisem** - pro popis funkce může být využito i slovní vyjádření. Například: každému reálnému číslu x je přiřazen jeho dvojnásobek nebo náklady za dopravu jsou dány součinem počtu ujetých kilometrů a kilometrovým sazebníkem.
- **Tabulkou** - známe hodnoty funkce pro několik hodnot argumentu funkce, ale nemáme dány hodnoty funkce pro jiné nezadané hodnoty argumentu (častý případ při empirických výzkumech, tabulky mohou být dále zpracovány například prostředky regresní analýzy, pomocí numerických metod atd.).
- **Graficky** - je patrný vývoj jednotlivých hodnot, ale nelze určit přesnou hodnotu v konkrétním bodě (12).

Graf funkce f je množina všech bodů v rovině xy (tzv. kartézská soustava souřadnic[2]) o souřadnicích [x;f(x)] (16).

1.1 Základní vlastnosti

1 Sudost a lichost

Funkce f je **sudá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x) = f(-x)$.

Funkce f je **lichá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = -f(x)$.

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y, graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic (15).

2 Monotónnost

Nechť je dána funkce f, $M \in D(f)$ a pro každé dva prvky $x_1,\ x_2 \in M$ platí $x_1 < x_2$.

Funkce f je **rostoucí** na množině M, jestliže platí $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce f je **klesající** na množině M, jestliže platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce f je **nerostoucí** na množině M, jestliže platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Funkce f je **neklesající** na množině M, jestliže platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.

---

[2] Více informací o soustavách souřadnic lze nalézt např. na internetové stránce http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/GVS/texty/L1_soustavy_souradnic.pdf

Je-li funkce f neklesající nebo nerostoucí na celém svém intervalu, označujeme ji jako **monotónní**.

Je-li funkce f rostoucí nebo klesající na celém svém intervalu, označujeme ji jako **ryze monotónní** (5).

3 Ohraničenost

Funkce f je **ohraničená shora,** jestliže existuje takové číslo H, že pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) \leq H$.

Funkce f je **ohraničená zdola**, jestliže existuje takové číslo H, že pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) \geq H$.

Je-li funkce f ohraničená shora i zdola, označujeme ji jako **ohraničenou**.

Není-li funkce f ohraničená shora ani zdola označujeme ji jako **neohraničenou** (12).

4 Periodičnost

Funkce f je **periodická** s periodou p, jestliže definiční obor obsahuje s každým bodem x také bod $x + p$, kde $p > 0$ a platí $f(x + p) = f(x)$ (5).

5 Prostá funkce

Funkce f je označována jako **prostá**, jestliže pro dvě libovolná čísla $x_1, x_2 \in D(f)$, přičemž $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$ (5).

1.2 Aritmetické operace

Funkce můžeme sčítat, odčítat, násobit a dělit. Aritmetické operace funkcí f a g se definují a značí takto [$x \in D(f)$]:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0 \ \text{(10).}$$

1.3 Inverzní funkce

Funkce f^{-1}, která každému $y \in H(f)$přiřazuje $x \in D(f)$, pro které platí $y = f(x)$, za podmínky, že funkce f je prostá, se nazývá **funkce inverzní** k funkci f. Podmínka prosté funkce je postačující podmínkou k tomu, aby obrácená závislost x na y byla závislostí funkční (11).

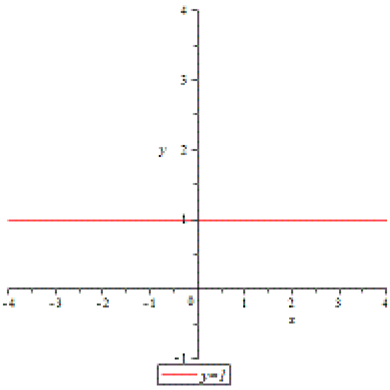
Grafy funkcí f a f^{-1} jsou souměrné podle osy prvního a třetího kvadrantu. Platí: $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$ (10).

1.4 Základní elementární funkce

V tomto odstavci je uveden přehled nejčastěji užívaných funkcí v ekonomické praxi.

1 Konstantní funkce

Konstantní funkce je funkce, která každému $x \in \boldsymbol{R}$ přiřazuje konstantní reálné číslo c. Zapisujeme ji ve tvaru $y = f(x) = c$. Jejím grafem je přímka rovnoběžná s osou x (11). Na obrázku číslo 1 je graf konstantní funkce $y = f(x) = 1$.



Obr. 1: Konstantní funkce (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

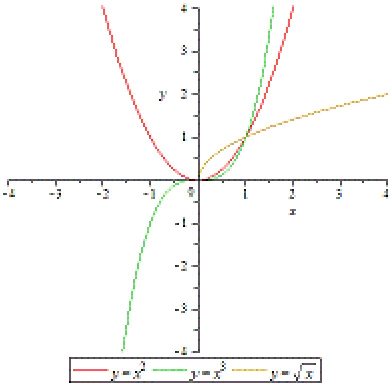
2 Obecná mocnina

Obecnou mocninou funkcí je nazývána funkce ve tvaru $y = f(x) = x^n$, kde $n \in \boldsymbol{R}$, $n \neq 0$ a $x \in (0; \infty)$. Definiční obor, obor hodnot a vlastnosti obecné mocninné funkce závisí na hodnotě exponentu n. U některý typů mocninných funkcí lze rozšířit definiční obor o záporná čísla, případně o nulu (12).

Na obrázku číslo 2 a 3 jsou pro názornost uvedeny grafy mocninných funkcí zpracovaných v Maple.

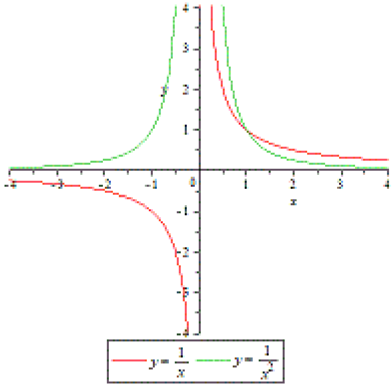
Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 2: $y = f(x) = x^2$, $y = f(x) = x^3$ a $y = f(x) = \sqrt{x}$.

Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 3: $y = f(x) = \frac{1}{x}$ a $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$.



Obr. 2: Mocninné funkce

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)



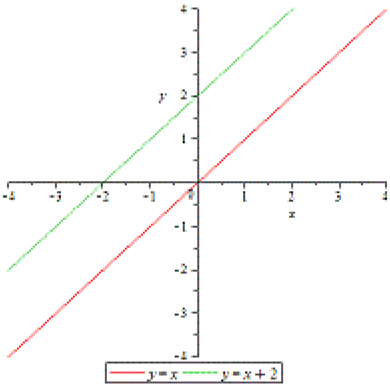
Obr. 3: Mocninné funkce

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

3 Lineární funkce

Lineární funkce je polynomická funkce 1. stupně. Zapisujeme ji ve tvaru $y = f(x) = ax + b$, kde $a, b \in \boldsymbol{R}$ a $a \neq 0$. Grafem lineární funkce je přímka. Číslo a určuje sklon přímky, nazývá se též **směrnicí přímky** (16).

Na obrázku číslo 4 jsou grafy lineárních funkcí $y = f(x) = x$ a $y = f(x) = x + 2$.

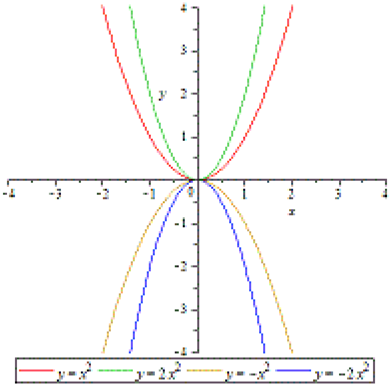


Obr. 4: Lineární funkce (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

4 Kvadratická funkce

Kvadratická funkce je polynomická funkce 2. stupně. Zapisujeme ji ve tvaru $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \boldsymbol{R}, a \neq 0$. Grafem kvadratické funkce je parabola (12).

Na obrázku číslo 5 jsou grafy kvadratických funkcí $y = f(x) = x^2$, $y = f(x) = 2x^2$, $y = f(x) = -x^2$ a $y = f(x) = -2x^2$.

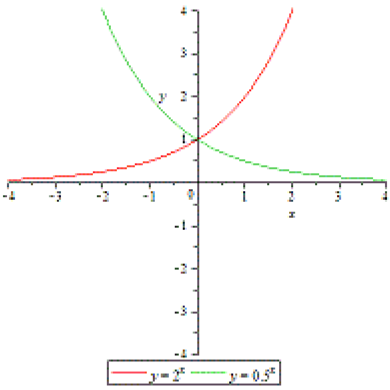


Obr. 5: Kvadratické funkce (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

5 Exponenciální funkce

Exponenciální funkci zapisujeme ve tvaru $y = f(x) = a^x$, kde $a > 0, a \neq 1$. Pro $a > 1$ je funkce rostoucí na celém definičním oboru, pro $0 < a < 1$ je funkcí klesající na celém definičním oboru. Hodnotu a nazýváme základ. Často používaný je přirozený základ $e \cong 2{,}7$ (11).

Na obrázku číslo 6 jsou zobrazeny grafy exponenciálních funkcí $y = f(x) = 2^x$ a $y = f(x) = 0{,}5^x$.

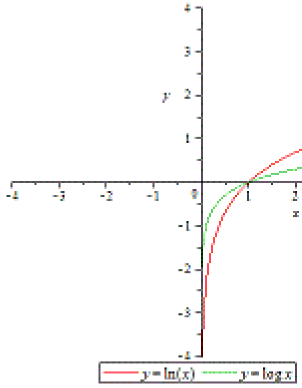


Obr. 6: Exponenciální funkce (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

6 Logaritmická funkce

Funkce $y = f(x) = \log_a x$, kde $a > 0, a \neq 1$ se nazývá logaritmická funkce o základu a. Logaritmická funkce přiřazuje každému číslu $x > 0$ takovou hodnotu y, pro kterou platí $x = a^y$. Pokud $a = e$, mluvíme o přirozeném logaritmu. Pokud $a = 10$, mluvíme o dekadickém logaritmu. Logaritmická funkce je inverzní k funkci exponenciální (12).

Na obrázku číslo 7 jsou zobrazeny grafy logaritmických funkcí $y = f(x) = \ln(x)$ a $y = f(x) = \log(x)$.



Obr. 7: Logaritmické funkce (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

7 Goniometrické funkce

Mějme jednotkovou kružnici (kružnice s poloměrem $r = 1$) se středem v počátku souřadnic a polopřímku vedenou z bodu $[0; 0]$, která svírá s kladným směrem osy x úhel α. Jako A označme vzniklý průsečík této polopřímky a kružnice.

První souřadnici bodu A označíme $\cos x$, tímto způsobem je definována funkce $\boldsymbol{y = f(x) = \cos\ x}$ **(cosinus)**.

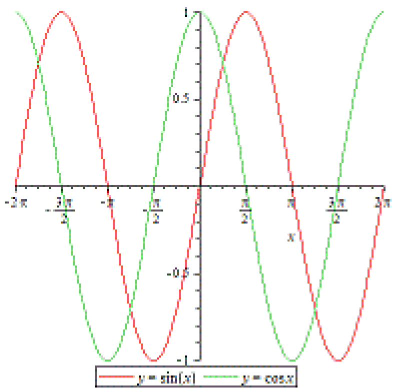
Druhou souřadnici bodu A označíme $\sin x$, tímto způsobem je definována funkce $\boldsymbol{y = f(x) = sin\ x}$ **(sinus)**.

Funkce **tangens** je definována vztahem $\operatorname{tg} x = f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$, pro $\cos x \neq 0$.

Funkce **kotangens** je definována vztahem $\operatorname{cotg} x = f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$, pro $\sin x \neq 0$ (12).

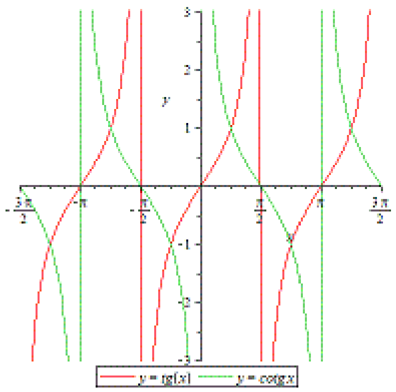
Na obrázku číslo 8 a 9 jsou grafy goniometrických funkcí v základním tvaru.

Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 8: $y = f(x) = \sin(x)$ a $y = f(x) = \cos(x)$. Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 9: $y = f(x) = tg(x)$ a $y = f(x) = cotg(x)$.



Obr. 8: Gon. funkce

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)



Obr. 9: Gon. Funkce

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

8 Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou funkce inverzní k funkcím goniometrickým.

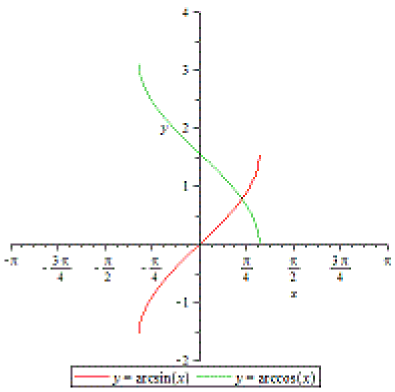
Funkce $\boldsymbol{y = f(\mathrm{x}) = \arcsin x}$ **(arkus sinus)** přiřazuje každému číslu $x \in < -1; 1 >$ číslo $y \in < -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} >$, pro které platí $\sin y = x$.

Funkce $\boldsymbol{y = f(x) = \arccos x}$ **(arkus kosinus)** přiřazuje každému číslu $x \in < -1; 1 >$ číslo $y \in < 0; \pi >$, pro které platí $\cos y = x$.

Funkce $\boldsymbol{y = f(\mathrm{x}) = \mathrm{arctg}\, x}$ **(arkus tangens)** přiřazuje každému číslu $x \in (-\infty; \infty)$ číslo $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, pro které platí $\mathrm{tg}\, y = x$.

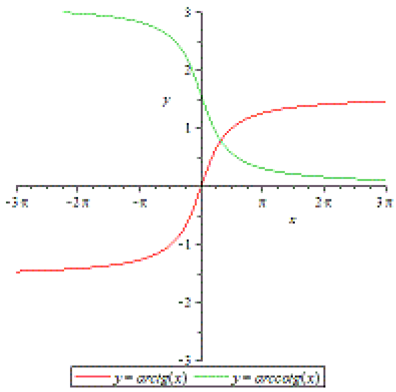
Funkce $\boldsymbol{y = f(x) = \mathrm{arctg}\, x}$ **(arkus kotangens)** přiřazuje každému číslu $x \in (-\infty; \infty)$ číslo $y \in (0; \pi)$, pro které platí $\mathrm{cotg}\, y = x$ (5).

Na obrázku číslo 10 a 11 jsou grafy cyklometrických funkcí v základním tvaru. Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 10: $y = f(x) = \arcsin(x)$ a $y = f(x) = arccos(x)$. Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 11: $y = f(x) = arctg(x)$ a $y = f(x) = arccotg(x)$.



Obr. 10: Cyklometrické funkce

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)



Obr. 11: Cyklometrické funkce

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

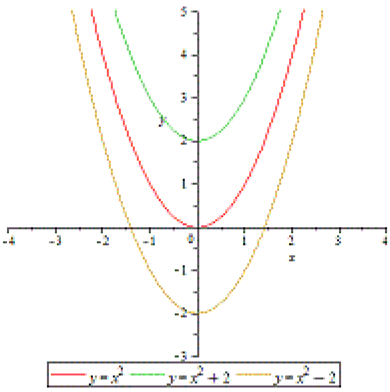
1.5 Transformace elementárních funkcí

V následujícím odstavci je popsáno, jak se změní graf funkce v případě, že se částečně změní funkční předpis (tj. změna podle jistých pravidel).

Předpokládejme, že známe graf funkce $y = f(x)$, c a $k \in \boldsymbol{R}$, $c > 0$, $k \neq 0$.

- **Přičtení čísla k hodnotě funkce** - graf nové funkce $y = f(x) + c$ vznikne posunutím grafu $y = f(x)$ o c jednotek **nahoru** (ve směru osy y).
- **Odečtení čísla od hodnoty funkce** - graf nové funkce $y = f(x) - c$ vznikne posunutím grafu $y = f(x)$ o c jednotek **dolů** (ve směru osy y) (12).

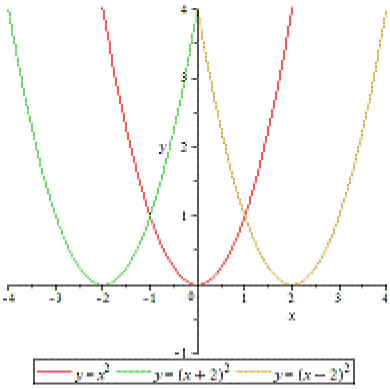
Na obrázku číslo 12 je ukázka zmíněných posunů grafu funkce $y = f(x) = x^2$. Předpisy posunutých funkcí: $y = f(x) = x^2 + 2$ a $y = f(x) = x^2 - 2$.



Obr. 12: Transformace funkcí (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

- **Přičtení čísla k argumentu funkce** - graf nové funkce $y = f(x + c)$ vznikne posunutím grafu $y = f(x)$ o c jednotek **doleva** (ve směru osy x).
- **Odečtení čísla od argumentu funkce** - graf nové funkce $y = f(x + c)$ vznikne posunutím grafu $y = f(x)$ o c jednotek **doprava** (ve směru osy x) (12).

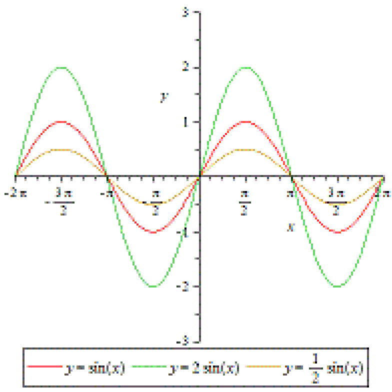
Na obrázku číslo 13 jsou zachyceny zmíněné posuny grafu funkce $y = f(x) = x^2$. Předpisy posunutých funkcí: $y = f(x) = (x + 2)^2$ a $y = f(x) = (x - 2)^2$.



Obr. 13: Transformace funkcí (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

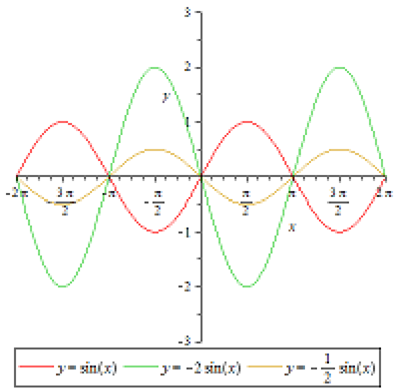
- **Vynásobení hodnoty funkce číslem** - graf nové funkce $y = k * f(x)$ vznikne:
  ***k*-násobným protažením** funkce $y = f(x)$ ve směru osy y, jestliže $k > 1$.
  ***k*-násobným zúžením** funkce $y = f(x)$ ve směru osy y, jestliže $0 < k < 1$.
  překlopením grafu funkce $y = f(x)$ podle osy x, jestliže $k < 0$ a zároveň ***k*-násobným protažením** ve směru osy y, jestliže $k < -1$ nebo ***k*-násobným zúžením** ve směru osy y, jestliže $-1 < k < 0$ (12).

Na obrázku číslo 14 a 15 jsou zachyceny zmíněné změny proporcionality grafu funkce $y = f(x) = \sin x$. Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 14: $y = f(x) = 2\sin(x)$ a $y = f(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$. Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 15: $y = f(x) = -2\sin(x)$ a $y = f(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)$.



Obr. 14: Transformace funkcí

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)



Obr. 15: Transformace funkcí

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

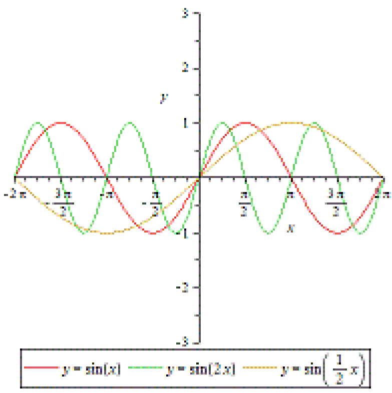
- **Vynásobení hodnoty argumentu funkce** - graf nové funkce $y = f(k * x)$ vznikne:

  ***k*-násobným zúžením** funkce $y = f(x)$ ve směru osy x, jestliže $k > 1$.

  ***k*-násobným roztažením** funkce $y = f(x)$ ve směru osy x, jestliže $0 < k < 1$.

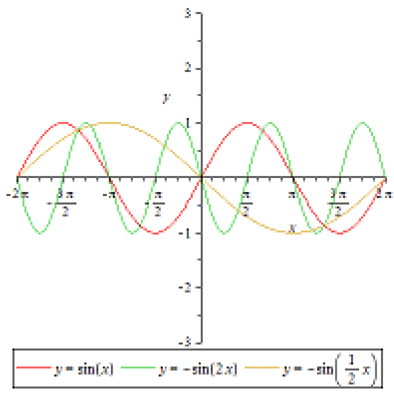
  překlopením grafu funkce $y = f(x)$ podle osy y, jestliže $k < 0$ a zároveň ***k*-násobným zúžením** ve směru osy x, jestliže $k < -1$ nebo ***k*-násobným roztažením** ve směru osy x, jestliže $-1 < k < 0$ (12).

Na obrázku číslo 16 a 17 jsou zachyceny zmíněné změny proporcionality grafu funkce $y = f(x) = \sin x$. Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 16: $y = f(x) = \sin(2x)$ a $y = f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$. Předpisy funkcí, jejichž grafy jsou na obrázku číslo 17: $y = f(x) = \sin(-2x)$ a $y = f(x) = \sin(-\frac{1}{2}x)$.



Obr. 16: Transformace funkcí

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

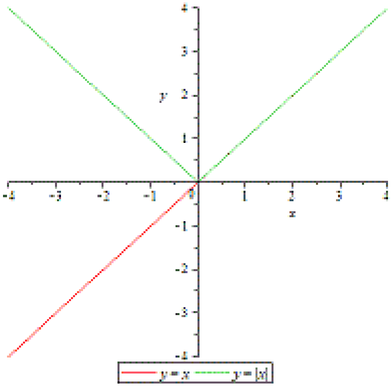


Obr. 17: Transformace funkcí

(Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

- **Absolutní hodnota funkce -** pro x, pro která platí f(x) ≥ 0, jsou grafy funkcí f(x) a |f(x)| shodné. Pro x, pro která platí f(x) < 0, jsou grafy funkcí f(x) a |f(x)| souměrné podle osy x (12).

Na obrázku číslo 18 jsou grafy funkcí $y = f(x) = x$ a $y = f(x) = |x|$.



Obr. 18: Absolutní hodnota funkce (Zdroj: vlastní zpracování v Maple)

1.6 Limita funkce

Limita charakterizuje chování funkce v blízkém okolí určitého bodu, bez ohledu na to, jestli je nebo není v daném bodě funkce definována (12).

Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu A, jestliže k jakémukoliv číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \in \delta$ okolí bodu x_0, z něhož vyjmeme bod x_0, tj. $x \neq x_0$, je $|f(x) - A| < \varepsilon$, a značíme $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$. Říkáme, že jde o *vlastní limitu ve vlastním bodě*. Zjednodušeně lze říci, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu A, pokud se $f(x)$ liší od čísla A jen velmi málo a je-li x dostatečně blízké bodu x_0 (15).

Funkce má v konkrétním bodě **nejvýše** jednu limitu - buď limita existuje a je jediná, anebo limita funkce neexistuje (10).

Limita funkce se může vypočítat prostým dosazením za x bod x_0 v případě, je-li funkce f funkcí elementární a bod x_0 vnitřním bodem definičního oboru funkce f. Limita respektuje aritmetické operace s funkcemi (10).

Důležité vzorce při počítání limit (tzv. známé limity):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *nevlastní limitu* $+\infty\ (-\infty)$, jestliže k libovolně velkému číslu $K > 0$ $(K < 0)$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna x $\in \delta$ okolí bodu x_0, pro něhož vyjmeme bod x_0, tj. $x \neq x_0$, je $f(x) > K$ $(f(x) < K)$. Říkáme, že jde o *nevlastní limitu ve vlastním bodě* a píšeme:
$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$) (15).

Funkce $f(x)$ má v nevlastním bodě $+\infty$ $(-\infty)$ limitu A, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $K > 0$, že pro všechna $x > K$ $(x < -K)$ platí $|f(x) - A| < \varepsilon$. Říkáme, že jde o *limitu v nevlastním bodě* a píšeme: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = A$ ($\lim_{x\to -\infty} f(x) = A$) (12).

Důležité vzorce při počítání nevlastních limit:

$\lim_{x\to \pm\infty} k = k$, kde k je konstanta;

$$\lim_{x\to \infty} x = \infty, \lim_{x\to -\infty} x = -\infty;$$
$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to \infty} a^x = \infty;$$
$$\lim_{x\to \infty} \log x = \infty;$$
$$\lim_{x\to \infty}\ (1 + \frac{1}{x})^x = e.$$

V případě, že v definici limity nahradíme pojem ryzí δ okolí pojmem levé (pravé) ryzí δ okolí, dostaneme definici limity zleva (zprava). Říkáme, že jde o *jednostranné limity* a píšeme: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$ ($\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$) (12).

Limita funkce $f(x)$ v bodě x_0 existuje a je rovna A, pokud $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ (10).

1.7 Asymptoty grafu funkce

„Asymptota grafu funkce je přímka, ke které se graf funkce přibližuje, vzdalujeme-li se od počátku“ (12, s. 68). Rozlišujeme dva typy asymptot:

- **Asymptota bez směrnice**

  Pokud platí, že funkce má ve vlastním bodě x_0 nevlastní limitu zprava nebo zleva, pak přímka $x = x_0$ je asymptotou bez směrnice grafu funkce $y = f(x)$. Asymptotu bez směrnice můžeme též nazývat svislou asymptotou (je rovnoběžná s osou x).

- **Asymptota se směrnicí**

  Pokud platí, že $\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - (kx + q)\big) = 0$, pak přímka $y = kx + q$ je asymptotou se směrnicí grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $+\infty$ resp. (-∞) (12).

$$k = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) \text{ resp. } \left(\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)\right)$$

$$q = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) \text{ resp. } (\lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx))$$

1.8 Spojitost funkce

Funkce $y = f(x)$ se nazývá *spojitá v bodě* x_0, pokud platí:

1. Funkce je v bodě x_0 definována.
2. Limita funkce v bodě x_0 je rovna hodnotě funkce v bodě x_0 (15).

Funkce je spojitá v intervalu $(a; b)$, pokud je spojitá v každém bodě tohoto intervalu. Funkce je spojitá v intervalu $< a; b >$, pokud je spojitá v $(a; b)$, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva (15).

Pokud je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $< a; b >$ a funkční hodnoty $f(a)$, (b) mají opačná znaménka, pak na daném intervalu existuje minimálně jeden nulový bod funkce f (10).

1.9 Derivace funkce

Derivace je základním pojmem v diferenciálním počtu. Má uplatnění tam, kde se zkoumá povaha funkčních závislostí určitých proměnných (veličin). V matematice, ekonomii, fyzice ale i v jiných vědních oborech. Pokud funkce popisuje závislost proměnné y na proměnné x, poté její derivace představuje závislost rychlostí změn y na x (10).

Funkce f má v bodě x_0 $\big(x_0 \in D(f)\big)$ derivaci, pokud x_0 je vnitřní bod $D(f)$ a existuje limita $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Jestliže tato limita neexistuje nebo pokud funkce f

není v bodě x_0 definována, pak funkce f nemá v bodě x_0 derivaci. V opačném případě mluvíme o *derivaci funkce* f *v bodě* x_0 (12).

Z pohledu geometrické interpretace vyjadřuje derivace $f'(x_0)$ směrnici (sklon) tečny t, sestrojené ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $P = [x_0; f(x_0)]$ (12).

Jestliže existují vlastní derivace funkcí $f(x)$ a $g(x)$ pro všechna $x \in (a; b)$, pak existují vlastní derivace funkcí $f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x) * g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ pro $g(x) \neq 0$ a platí:

$$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x),$$

$$\big(f(x) - g(x)\big)' = f'(x) - g'(x),$$

$$\big(f(x) * g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$$

$(c * f(x)' = c * f'(x)$ (16).

V tabulce číslo 2 je zobrazen přehled vzorců pro derivaci vybraných elementárních funkcí.

Tab. 2: Přehled základních vzorců derivací (Převzato z: (5))

Funkce	Derivace funkce	Podmínky
c	0	c je konstanta
x	1	$x \in (-\infty; \infty)$
x^n	nx^{n-1}	$x \in (-\infty; \infty)$, n je libovolná konstanta
a^x	$a^x \ln a$	$x \in (-\infty; \infty)$, $a > 0$
e^x	e^x	$x \in (-\infty; \infty)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in (-\infty; \infty)$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in (-\infty; \infty)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$

$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1; 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1; 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in (-\infty; \infty)$
$\operatorname{arccotg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in (-\infty; \infty)$

Funkce $f(x)$ je po derivování opět funkcí, její definiční obor je buď roven definičnímu oboru funkce f, anebo je jeho podmnožinou. V případě, že má funkce $f'(x)$ derivaci, označujeme ji jako druhou derivaci funkce $f(x)$ a značíme ji ve tvaru $f''(x)$. Obecně *n-tou derivaci funkce* f definujeme vztahem $f^n(x) = (f^{n-1}(x))'$ (16).

1.10 Monotónnost a extrémy funkce

Monotónnost funkce vyjadřuje, zda je funkce f v bodě (na intervalu) rostoucí či klesající. Tuto vlastnost funkce vyšetřujeme pomocí znaménka první derivace (16).

Určíme a na číselnou osu vyneseme všechny **stacionární body** funkce $f(x)$, tzn. body ve kterých je $f'(x) = 0$ nebo body ve kterých první derivace neexistuje. Derivace může měnit znaménko právě a pouze v těchto bodech (12).

Je-li funkce $f(x)$ definovaná na intervalu I spojitá, má v každém vnitřním bodě tohoto intervalu I derivaci a v každém bodě intervalu platí:

$f'(x) > 0$, pak $f(x)$ je na intervalu I **rostoucí**,

$f'(x) \geq 0$, pak $f(x)$ je na intervalu I **neklesající**,

$f'(x) < 0$, pak $f(x)$ je na intervalu I **klesající**,

$f'(x) \leq 0$, pak $f(x)$ je na intervalu I **nerostoucí** (16).

V případě, že pro funkci $f(x)$ platí $f(x) > f(x_0)$, poté má funkce v bodě x_0 lokální minimum. V případě, že pro funkci $f(x)$ platí $f(x) < f(x_0)$, poté má funkce v bodě x_0 lokální maximum. Tato lokální maxima a lokální minima funkce mohou nastávat pouze ve stacionárních bodech, označujeme je jako **lokální extrémy** (12).

O **globálních extrémech** mluvíme, pokud funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in I \subseteq D(f)$ globální maximum (minimum), kdy pro každý bod $x \in I$, takový že $x \neq x_0$, platí $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$ (12).

1.11 Konvexnost a konkávnost

Konvexnost a konkávnost udává zakřivení grafu funkce f, které vyšetřujeme pomocí znaménka druhé derivace (16).

Určíme a na číselnou osu vyneseme všechny body funkce $f(x)$, ve kterých je $f'(x) = 0$. Derivace může měnit znaménko právě a pouze v těchto bodech (12).

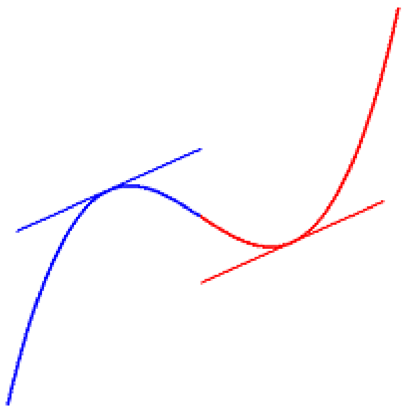
Je-li funkce $f(x)$ definovaná na intervalu I spojitá, má v každém vnitřním bodě tohoto intervalu I derivaci a v každém bodě intervalu platí:

$f''(x) > 0$ pak $f(x)$ je na intervalu I **konvexní,**

$f''(x) < 0$ pak $f(x)$ je na intervalu I **konkávní** (16)**.**

Pokud existuje levé okolí bodu x_0, v němž je funkce $f(x)$ konvexní (konkávní) a pravé okolí bodu x_0, v němž je funkce konkávní (konvexní), poté mluvíme o **inflexním bodu** funkce v bodě x_0 (12).

Na obrázku číslo 19 je modře znázorněna konkávní část grafu funkce f (graf v tomto intervalu leží pod tečnou), červeně pak část konvexní (graf v tomto intervalu leží nad tečnou). V místě, kde se barva funkce mění z modré na červenou, se nachází inflexní bod.



Obr. 19: Konvexnost a konkávnost (Zdroj: http://sk.wikipedia.org/wiki/Konvexná_funkcia)

1.12 Vyšetřování průběhu funkce

Vyšetření průběhu funkce je postup, kterým získáme všechny potřebné vlastnosti k tomu, abychom zjistili základní rysy chování funkce. Výstupem tohoto postupu je co nejvěrnější model grafu funkce (10).

Při vyšetřování dodržujeme posloupnost těchto kroků:

1. Určení definičního oboru a bodů nespojitosti.
2. Určení průsečíků s osami, nulových bodů (kde je funkce kladná a záporná), chování funkce v krajních bodech intervalů D(f) a základních vlastností funkce.
3. Vyšetření monotónnosti funkce a určení lokálních extrémů.
4. Vyšetření konvexnosti, konkávnosti a určení inflexních bodů.
5. Určení asymptot grafu funkce.
6. Stanovení tabulky několika funkčních hodnot.
7. Načrtnutí grafu funkce (12).